УДК 681.51001.573

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ПОНТРЯГИНА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ БОЛЬШОЙ СИСТЕМЫ

Т.С. Писклова
(представил д.т.н., проф. О.Е. Федорович)

Рассматривается вопрос оценки хозяйственной деятельности предприятия на основе определения оптимального соотношения между инвестициями и потреблением. При решении полученной оптимизационной задачи используется принцип максимума Понтрягина с вводом функции Гамильтона.

Хозяйственная деятельность предприятия любой формы собственности (имеются в виду производители продукции) неотделима от основных показателей: полученная прибыль и инвестиции. Наиболее приемлемыми математическими методами, используемыми при определении оценки хозяйственной деятельности предприятия, являются методы многоцелевой оптимизации планов функционирования предприятия, интегральный метод факторного анализа и матричный метод.

Производственные показатели в общем виде можно представить в векторной форме

$$\mathbf{П(t) = C(t) + И(t)}, \tag{1}$$

где

$$\mathbf{И(t) = \mu\Phi_0(t) + \frac{d\Phi_0}{dt}}; \tag{2}$$

$\mathbf{П(t)}$ - прибыль; $\mathbf{И(t)}$ - инвестиции; μ - норма амортизации; $\mathbf{\Phi_0(t)}$ - вектор основных производственных фондов; $\mathbf{C(t)}$ - вектор потребления.

Капитальные вложения используются как для покрытия амортизационных отчислений, так и для увеличения объема капиталовложений.

Хозяйственная деятельность любого производителя характеризуется производственной функцией

$$\mathbf{П = f(\Phi_0, T)}, \tag{3}$$

где $\mathbf{T}$ - трудовые ресурсы.

Эта функция предположительно однородная первой степени, т.е.

$$\mathbf{f(a\Phi_0, aT) = af(\Phi_0, T) = aП} \tag{4}$$

и, если $a = \frac{1}{T}$, то получим

$$\frac{П}{T} = f(\frac{Ф_0}{T}, 1) = f(\frac{Ф}{T}). \qquad (5)$$

Кроме того, большая экономическая система (каким является производственное предприятие) не изменяет в период времени t_0 от $t_1 (t_0 \leq t \leq t_1)$ свои параметры. Значит

$$\begin{cases} \frac{df}{dФ_0} > 0; \quad \frac{d^2\varphi}{dФ_0^2} < 0; \\ \frac{df}{dT} > 0; \quad \frac{d^2\varphi}{dT^2} < 0, \end{cases} \qquad (6)$$

а изменение трудовых ресурсов приводит к уравнениям:

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = t_p; \qquad (7)$$

$$C(t) = \frac{dФ_0}{dt} + (\mu + t_p)Ф_0 = \frac{dФ_0}{dt} + \lambda Ф_0; \qquad (8)$$

$$\lambda = \mu + t_p. \qquad (9)$$

Анализ (8) показывает, что, если:

1) $t_p < 0$; $\lambda > 0$, то фондовооруженность увеличивается за счет капитальных вложений и уменьшения трудовых ресурсов производственных фондов;

2) $t_p < 0$; $\lambda = 0$, то фондовооруженность не изменятся даже при нулевых капитальных вложениях и все инвестиции идут на прирост фондовооруженности;

3) $t_p < 0$; $\lambda < 0$, то фондовооруженность увеличивается без инвестиций за счет уменьшения численности работающих.

Из уравнений (1), (3), (8) получаем дифференциальное уравнение модели экономического роста

$$T(п(t)) = C(t) + \frac{dФ_0}{dt} + \lambda Ф_0(t). \qquad (10)$$

Рассматривая уравнение (10), можно установить, что $C(t)$ является управляющим параметром и управление должно обеспечивать распределение прибыли, при котором в последующем должен быть получен максимальный объем прибыли. Кроме того, управляющий параметр определяет потребление. В связи с этим, вводим понятие "полезность потребления"

$$И = И(C(t)). \qquad (11)$$

Оптимальность решения достигается при

$$\frac{dИ(C)}{dC} = И'(C) > 0, \qquad (12)$$

где $И''(C) < 0$;

$0 < C < \infty.$

Показателем кривизны функции (11) является эластичность предельной полезности

$$\tau(C) = -C\frac{И''(C)}{И'(C)}. \qquad (13)$$

Следует иметь в виду, что для каждого работающего предпочтительно наибольшее потребление в ближайшее время и поэтому вводим функцию весов для полезности

$$\omega = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\varsigma(t-t_0)} и(c(t))dt, \qquad (14)$$

где ς - параметр заинтересованности.

Задачу оптимального управления $C^*(t)$ можно представить системой уравнений

$$\begin{cases} \max\limits_{C(t)} \omega = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\varsigma(t-t_0)} И(C(t))dt; \\ \frac{d\Phi_0}{dt} = f(\Phi_0) = \lambda\Phi_0 - C; \\ \Phi_0(t_0) = \Phi_0; \\ 0 \le C \le f(\Phi_0). \end{cases} \qquad (15)$$

Решение этой задачи проводится с использованием принципа максимума Понтрягина и функции Гамильтона. Принцип максимума Понтрягина гласит, что необходимым условием оптимальности допустимого управления $И(t)$ и решения $\hat{X}(t)$ является существование неисчезающего решения $\hat{\psi}(t)$, которое принадлежит $\hat{X}(t)$ и $\hat{И}(t)$ и удовлетворяет системе сопряжения таким образом, что для всех $t(t_0 \le t \le T)$ функция Гамильтона $\hat{H}$ принимает по переменной **И** свое наибольшее значение.

Опишем алгоритм решения рассматриваемой задачи оптимизации.

1. Определяют начальные условия $t = t_0$. Интегральный функционал расширяют и вводят функцию Гамильтона **H**.

2. Из условия $\frac{dH}{dx} = 0$ определяют оптимальное управление $\mathring{И}$.

3. Из условия $\overset{\circ}{\Psi} = -\frac{dH}{dx}$ получают дифференциальное уравнение сопряженной системы.

4. Оптимальное управление $\overset{\circ}{\text{Й}}$ подставляют в полученное дифференциальное уравнение.

5. Из краевых условий для **x**:

$$x_i(t_0) = x_{i\,0},\ i = 1,\ldots,P \le И;$$
$$x_к(T) = x_{к\,T},\ к = 1,\ldots,q \le И,$$

а также из условия трансверсальности для Ψ определяют неизвестные постоянные интегрирования. При этом условие трансверсальности для $\Psi(t)$ определяется в момент $t = T$.

Рассмотрим функцию Гамильтона

$$H = e^{-\varsigma(t-t_0)}\left\{И(c) + q\left[f(\Phi_0) - \lambda\Phi - C\right]\right\}, \quad (16)$$

где **q** - сопряженная переменная, которая интегрируется как стоимость дополнительных производственных фондов.

Из принципа максимума Гамильтона $\frac{dH}{dc} = 0$ следует, что функция

$$q = И'(C) \quad (17)$$

является предельной “полезности потребления” на одного работающего.

Рассматривая условие

$$\frac{dH}{d\Phi_0} = -\frac{d}{df}\left(e^{-\varsigma(t-t_0)}q(t)\right), \quad (18)$$

получаем

$$\frac{dq}{dt} = -\left[f'(\Phi_0) - (\lambda + \varsigma)\right]q. \quad (19)$$

Из (19) находим

$$f'(\Phi_0) + \frac{1}{q}\frac{dq}{dt} - \mu - И - \varsigma = 0. \quad (20)$$

Подставляя (17) в (20), получим

$$\frac{1}{q}\frac{dq}{dt} = \frac{И''(C)}{И'(C)}\frac{dC}{dt} = -\tau(C)\frac{1}{C}\frac{dC}{dt}. \quad (21)$$

Дифференциальное уравнение для управляющего параметра имеет вид

$$\frac{dC}{dt} = \frac{1}{\varsigma(C)}\left[f'(\Phi_0) - (\lambda + \varsigma)\right]. \quad (22)$$

Оптимальные траектории Φ^* и $C^*(t)$ должны удовлетворять дифференциальным уравнениям (19) и (22).

Интеграл заинтересованности имеет конечный верхний предел $\mathbf{t_1}$ и в конце планового периода фондовооруженность должна быть не меньше фиксированного объема $\mathbf{\Phi_1}$. Тогда условие для сопряженной величины определяется как

$$\mathbf{e^{-\varsigma(t-t_0)}q(t_1)(\Phi(t_1)-\Phi_1)=0}\,. \tag{23}$$

Таким образом, в случае, если в момент $\mathbf{t_1}$ достигается $\mathbf{\Phi_1}$, то траектория оптимального роста удовлетворит магистральному свойству, т.е. если плановый период достаточно длинный, то траектория потребления на одного работника и фондовооруженность в течении сколь угодно долгого времени находится вблизи линии равновесия, соответствуя сбалансированному росту или же находится в оптимальном конусе вокруг луча фон Неймана (принцип магистрального свойства).

Связь между прибылью и фондовооруженностью можно представить как

$$\mathbf{П = в\Phi_0^{\alpha}}\,, \tag{24}$$

где $\mathbf{0 < \alpha < 1}$.

Функцию полезности потребления можно представить значением удельного веса фондов магистрального стимулирования

$$\mathbf{И\ (C) = m\ /\ e,} \tag{25}$$

где **m** - объем фондов стимулирования (без учета фондов развития производства).

Тогда задача оптимального управления представляется как:

$$\begin{cases} \max\limits_{e(t)} \omega = \int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-(t-t_0)}\,\dfrac{m}{e}(t)dt; \\ \dfrac{d\Phi_0}{dt} = f(\Phi_0)-\lambda\Phi_0 - C = в\Phi_0^{\alpha} - \lambda k - e; \\ \Phi_0(t_0) = \Phi_0; \\ 0 \le C \le f(\Phi_0). \end{cases} \tag{26}$$

Предположим, что функция “полезности потребления” линейна, т.е.

$$\mathbf{C(t) = a_0 + a_1 t}\,. \tag{27}$$

Тогда $\mathbf{q = И'(C) = a}$, $\mathbf{И''(C) = 0}$. При τ = **0** $\mathbf{И(C) = C}$. Принимаем ς = **1**. Целевой функционал задачи будет иметь вид

$$\omega = \int\limits_{t_0}^{\infty} e^{(t-t_0)}e(t)dt\,. \tag{28}$$

Естественно, потребление не может опускаться ниже допустимого минимума $\mathbf{\overline{C}}$. Следовательно

$$\mathbf{\overline{C} \le C(t) \le f(\Phi_0)}. \tag{29}$$

При описанных ограничениях гамильтониан имеет вид

$$\mathbf{H = e^{-(t-t_0)}\{C(1-q)+q[f(\Phi_0)-f\Phi_0]\}}, \qquad (30)$$

и, как видно, линейно зависит от **C**. Значит, решение $\mathbf{C}^*$ при **q>1** равно **C**, при **q<1** равно $\mathbf{C'(t)}$, а при **q=1** равно $\mathbf{f(\Phi_0)}$.

Дифференциальные уравнения (10) и (19) соответственно преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathbf{d\Phi_0}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{f(\Phi_0)-\lambda\Phi_0 - C};\\
&\frac{\mathbf{dq}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{-[f'(\Phi_0)-(\lambda+1)]q}.
\end{aligned} \qquad (31)$$

Система будет равновесна в точке $(\mathbf{\Phi_0^*, q})$, координаты которой можно определить при условии

$$\frac{\mathbf{d\Phi_0}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{dq}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{0}. \qquad (32)$$

Учитывая (10), (19) и (22), получим

$$\begin{cases}
\mathbf{f'(\Phi_0^*) = \lambda + 1};\\
\mathbf{q^* = 1};\\
\mathbf{C^* = f(\Phi_0^*) - \lambda\Phi_0^*}.
\end{cases} \qquad (33)$$

Оптимальная траектория будет существовать, если

$$\mathbf{\overline{C} < C^*}; \quad \mathbf{\Phi_0(0) = K_T},$$

где $\mathbf{K_T}$ - точка пересечения прямой $\mathbf{C = \overline{C}}$ и кривой $\mathbf{\Pi = f(\Phi_0) - \lambda\Phi_0}$.

Правило поведения оптимальной траектории будет следующим:

- если начальное значение фондовооруженности меньше, чем в точке равновесия, то необходимо на потребление направить минимальную сумму из прибыли и обеспечить тем самым быстрое увеличение фондовооруженности;
- если достигнуто равновесие $\mathbf{\Phi = \Phi_0^*}$, то потребление перейдет скачком на уровень

$$\mathbf{C^* = f(\Phi_0^*) - \lambda\,\Phi_0^*}. \qquad (34)$$

В большой экономической системе в показателях работы мгновенного скачка не может произойти, т.е. здесь необходим переходной период времени.

Если $\mathbf{\Phi_0(0) < \Phi_0^* < \Phi_0}$ и интеграл имеет предел $\mathbf{t_1}$ при постоянной предельной полезности, то магистральное свойство выполняется.

Кроме вышерассмотренной, возможна функция полезности

$$\mathbf{И(C) = C^{\gamma}}. \qquad (35)$$

где $\gamma = \mathbf{m/e}$.

Тогда:

$$\mathbf{И'(C) = \gamma C^{\gamma-1} > 0};$$

$$\mathbf{И''(C) = \gamma^{\gamma-1} C^{\gamma-1} < 0},$$

что соответствует (12), так как $\mathbf{0} < \gamma < \mathbf{1}$.

Эластичность предельной полезности описывается уравнением

$$\mathbf{\tau(C) = (\gamma - 1) > 0}. \qquad (36)$$

Стоимость дополнительных производственных фондов определяется формулой (17)

$$\mathbf{q = И'(C) = \gamma C^{\gamma-1} > 0}. \qquad (37)$$

Система дифференциальных уравнений (32, 33) при $\varsigma = \mathbf{1}$ примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = \dfrac{1}{\gamma - 1}\left[\alpha в \Phi_0^{\alpha-1} - (\lambda + 1)\right]; \\ \dfrac{d\Phi_0}{dt} = в\Phi_0^{\alpha} - \lambda\Phi_0 = C. \end{cases} \qquad (38)$$

Условие $\dfrac{de}{dt} = \dfrac{d\Phi_0}{dt} = 0$ приводит к решению

$$\mathbf{C^* = f(\Phi_0^*) - \lambda\Phi_0^*} \qquad (39)$$

и

$$\mathbf{f(\Phi_0^*) = \lambda + 1}, \qquad (40)$$

характеризующему траектории сбалансированности и роста.

В случае $\mathbf{\Phi_0(0) < \Phi_0^*}$ происходит увеличение фондовооруженности до достижения точки равновесия. При $\mathbf{\Phi_0(0) \geq \Phi_0^*}$ условие $\dfrac{d\Phi_0}{dt} = 0$ выполняется до достижения границы траектории. При этом точка равновесия достигается быстрее при выполнении условия $\mathbf{H > 0}$.

Изложенный подход применим для решения прикладных задач, в которых необходимо определять оптимальную траекторию управляемого объекта в необходимое состояние за кратчайшее время.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976. – 392 с.

2. Хофер Э., Лундерштадт Р. Численные методы оптимизации. – М.: Машиностроение, 1981. – 192с.

3. Бергстром А. Построение и применение экономических моделей. – М.: Прогресс, 1970. – 176с.